Primzahlen und die Division durch 12

November 24, 2025

Es gibt genau zwei Primzahlen, die bei der Division ihres Quadrates durch 12 nicht den Rest 1 ergeben.

1 Es gibt mindestens zwei solche Zahlen, nämlich 2 und 3

1.1 Ein paar Vorbemerkungen zur Erinnerung

Wenn n und p natürliche Zahlen sind, dann gibt es Zahlen $a, r \in \mathbb{N}_0$ so, dass $r < p$ und $n = ap + r$.

Wir nennen r den Rest der Division von n durch p .

1.2 Beweis

2 und 3 sind Primzahlen, und es gilt:

$$2^2 = 4 = 0 \cdot 12 + 4$$

Rest ist 4.

$$3^2 = 9 = 0 \cdot 12 + 9$$

Rest ist 9.

2 Dies sind die einzigen solchen Zahlen

2.1 Behauptung

Es sei n prim. Dann gilt: $n > 3 \Rightarrow n^2 = 12a + 1$.

2.2 Beweis

$$n^2 = 12a + 1 \Longleftrightarrow n^2 - 1 = 12a$$

Wir müssen also nur beweisen, dass $n^2 - 1$ durch 12 teilbar ist. Dazu genügt es, zu zeigen, dass $n^2 - 1$ durch 3 und durch 4 teilbar ist.

$n \in \mathbb{N}$ sei prim und es gelte $n > 3$

Weil n eine Primzahl ist, ist sie weder durch 2, noch durch 3 teilbar. Das heißt:

$n = 2a + 1$ und entweder $n = 3b + 1$ oder $n = 3b + 2$

Es gilt also:

$$n^2 - 1 = (2a + 1)^2 - 1 = 4a^2 + 4a + 1 - 1 = 4a(a + 1)$$

$n^2 - 1$ ist also durch 4 teilbar.

Es sei nun $n = 3b + 1$. Dann ist:

$$n^2 - 1 = (3b + 1)^2 - 1 = 9b^2 + 6b + 1 - 1 = 3b(3b + 2)$$

Für $n = 3b + 1$ ist $n^2 - 1$ durch 3 teilbar.

Betrachten wir jetzt $n = 3b + 2$:

$$n^2 - 1 = (3b + 2)^2 - 1 = 9b^2 + 12b + 4 - 1 = 3b(3b + 4) + 3 = 3[b(3b + 4) + 1]$$

Also ist $n^2 - 1$ auch für $n = 3b + 2$ durch 3 teilbar.

Damit ist die Behauptung bewiesen.